

Anita Milewska

**Metody probabilistyczne
i statystyka matematyczna
w inżynierii lądowej
i transportowej**

Gdańsk 2025

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Dariusz Mikielewicz

RECENZENT

Hubert Wysocki

REDAKCJA JĘZYKOWA

Agnieszka Frankiewicz

SKŁAD

Wioleta Lipska-Kamińska

PROJEKT OKŁADKI

Anita Milewska

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://sklep.pg.edu.pl/>

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy.

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2025

ISBN 978-83-7348-931-8

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 8,04, ark. druku 12,88, 1311/1256

Druk i oprawa: Volumina.pl Sp. z o.o.

ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08

Spis treści

Wykaz ważniejszych symboli i oznaczeń	7
1. Wstęp i wprowadzenie	11
2. Przestrzeń probabilistyczna, zmienna losowa i jej funkcje	14
3. Zmienne losowe dyskretne i ciągłe	32
4. Zmienne losowe wielowymiarowe – wektory losowe	44
5. Wartość oczekiwana i wariancja – parametry zmiennych losowych	54
6. Przykłady rozkładów zmiennych losowych stosowanych w praktyce inżynierskiej	80
7. Nierówność Czebyszewa i zbieżność według prawdopodobieństwa	107
8. Metoda najmniejszych kwadratów	114
9. Wprowadzenie do statystyki matematycznej	130
10. Statystyki i wyznaczanie ich wartości z próby	134
11. Przedziały ufności	156
12. Hipotezy statystyczne	161
Dodatek	179
Zalecana bibliografia	199
Streszczenie w języku polskim	203
Streszczenie w języku angielskim	204

Wykaz ważniejszych symboli i oznaczeń

(a, b)	– przedział ufności
\mathcal{B}	– klasa zbiorów borelowskich
CBR	– wskaźnik nośności
$cov(X, Y)$	– kowariancja zmiennych losowych X i Y
E	– kryterium określające stopień dopasowania przyjętego modelu do przeprowadzonych pomiarów
$E(X), EX, m, m_X$	– wartość oczekiwana zmiennej losowej X
E_{vd}	– moduły dynamiczne
$erf(x)$	– funkcja błędu
$F_e(x)$	– dystrybuanta empiryczna
$F_X(x), F(x)$	– dystrybuanta zmiennej losowej X
$F_X(x), F_Y(y)$	– dystrybuanty brzegowe dwuwymiarowej zmiennej losowej $[X, Y]$
$F_{X,Y}(x, y), F(x, y)$	– dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej $[X, Y]$
$f(x)$	– gęstość prawdopodobieństwa (krótko: gęstość)
$f^{-1}(D)$	– przeciwobraz zbioru D przy przekształceniu f
$f_X(x), f_Y(y)$	– brzegowe gęstości prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej $[X, Y]$
$f_{XY}(x, y), f(x, y)$	– łączna gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej $[X, Y]$
H_0	– hipoteza zerowa
H_1	– hipoteza alternatywna
HB	– twardość w skali Brinella
I_{d0}	– początkowy stopień zagęszczenia gruntu
J, Q, D	– wskaźniki jakości toru
\mathcal{M}	– klasa zdarzeń probabilizowalnych
M_0	– początkowy edometryczny moduł ścisłości gruntu
$m_{ck} = E[(X - m_1)^k]$	– momenty centralne rzędu k zmiennej losowej X
$m_k = EX^k$	– momenty zwykłe rzędu k zmiennej losowej X
m_{kl}	– momenty zwyczajne rzędu $k + l$
n	– licznosc próby

n_i^*	– skumulowane licznosci
P	– prawdopodobienstwo
P_X	– rozklad zmiennej losowej X
P_{X_1, X_2}	– rozklad dwuwymiarowej zmiennej losowej $\vec{X} = [X_1, X_2]$ lub rozklad łączny zmiennych losowych X_1, X_2
p_i, p_{ij}	– prawdopodobienstwa
$p_{i\bullet}, p_{\bullet j}$	– prawdopodobienstwa brzegowe
$\hat{Q}_n = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$	– estymator parametru Q
R	– statystyka o nazwie rozstep
S	– wyrażenie wykorzystywane w metodzie najmniejszych kwadratów do wyznaczenia stałych a i b
S^2	– statystyka o nazwie średnie odchylenie kwadratowe (od średniej arytmetycznej)
S_m^2	– statystyka o nazwie średnie odchylenie kwadratowe (od wartości oczekiwanej m)
S_0^2	– statystyka o nazwie średnie odchylenie kwadratowe (od średniej arytmetycznej)
t	– zmienna losowa o rozkładzie t Studenta
U, V	– próbki z karbem odpowiedniego kształtu
$V(X), VX$	– wariancja zmiennej losowej X
X	– zmienna losowa
$X \in N(m, \sigma), X \sim N(m, \sigma)$	– zmienna losowa X o rozkładzie normalnym o parametrach m i σ
\bar{X}	– statystyka o nazwie średnia arytmetyczna
\vec{X}	– wektor losowy
$\vec{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$	– wektor losowy, próba losowa
X_M	– statystyka o nazwie mediana
X_n	– ciąg zmiennych losowych
$\bar{x}, s^2, s_0^2, s_m^2, r, x_M$	– wyznaczone z próby wartości odpowiednich statystyk
\vec{x}, \vec{y}	– odpowiednio wejście i wyjście układu dynamicznego
x_p	– kwantyl rzędu p zmiennej losowej X
$[x_1, x_2, \dots, x_n]$	– próba
$Y = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$	– statystyka
$Y = \frac{X-m}{\sigma}$	– zmienna losowa standaryzowana
$y = ax + b$	– prosta regresji
$y_{opt} = a_0x + b_0$	– prosta optymalna
α	– poziom istotności
α_3	– standaryzowany moment centralny trzeciego rzędu
$\Gamma(t)$	– funkcja gamma Eulera
δ, θ	– parametry rozkładu Weibulla
λ	– parametr rozkładu Poissona lub rozkładu wykładniczego
μ_{kl}	– momenty centralne rzędu $k + l$
ρ_{XY}, ρ	– współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y

$\sigma = \sqrt{V(X)}, \sigma_X$	– odchylenie standardowe
$\phi(y)$	– dystrybuanta zmiennej losowej $Y \in N(0, 1)$
$\varphi(y)$	– gęstość zmiennej losowej $Y \in N(0, 1)$
Ω	– przestrzeń zdarzeń elementarnych
(Ω, \mathcal{M}, P)	– przestrzeń probabilistyczna
ω	– zdarzenie elementarne
$1 - \alpha$	– poziom ufności, współczynnik ufności

Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał Wszechświat.

Galileo Galilei
(Il Saggiatore, 1623)

1. Wstęp i wprowadzenie

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna to stosunkowo nowe działy matematyki. Formalnie można uznać, że początkiem nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa są lata 30. XX wieku, kiedy to A.N. Kołmogorow przedstawił rachunek prawdopodobieństwa w postaci teorii aksjomatycznej. Jednocześnie mniej więcej w tym samym okresie z rachunku prawdopodobieństwa wyodrębnił się jego nowy dział – statystyka matematyczna. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna posługują się językiem i metodami matematyki, a dodatkowo mają szerokie zastosowania w: fizyce, chemii, naukach technicznych, naukach przyrodniczych, ekonomii, socjologii, praktyce inżynierskiej itp.

Rachunek prawdopodobieństwa (probabilistyka, z łac. *probabilis* – prawdopodobny) zajmuje się opisywaniem i badaniem prawidłowości, którym podlegają różne zdarzenia przypadkowe (losowe). Prawidłowości te dają się zaobserwować np. przy wielokrotnym powtarzaniu danego doświadczenia losowego przeprowadzonego (obserwowanego) w bardzo podobnych (bądź identycznych) warunkach.

Statystyka matematyczna na podstawie wyników badań, doświadczeń i obserwacji umożliwia wysuwanie poprawnych wniosków i podaje metody postępowania prowadzące do ich akceptowania lub odrzucania. W całej swej rozciągłości korzysta ona z rachunku prawdopodobieństwa. W związku z tym można stwierdzić, że nie ma statystyki bez probabilistyki. Niekiedy można się spotkać z koncepcją przedstawiania statystyki bez oparcia jej na teorii rachunku prawdopodobieństwa. Jest to duże nieporozumienie.

Chodzi o to, aby dany wzór, twierdzenie, reguła, sposób postępowania itp. miały swoje merytoryczne uzasadnienie np. w postaci dowodów. Bez tych – chociaż wybranych – uzasadnień nie wyczuwamy istoty danej teorii. To samo dotyczy przecież także mechaniki, wytrzymałości materiałów, fizyki itp.

Nie same wzory są ważne. Ważne są założenia, przy których mogą one być stosowane (nie mogą być stosowane bezrefleksyjnie). Każde postępowanie, szczególnie w obszarze odpowiedzialnej działalności technicznej, musi mieć swoje logiczne uzasadnienie podparte merytoryczną wiedzą z wielu dziedzin i dyscyplin nauki. W przypadku wątpliwości zawsze należy na gruncie danej teorii taki dowód przeprowadzić.

Aby zbudować (stworzyć) model i opisać go zmienną losową, trzeba znać badane zjawisko, np. twardość, udurowienie, przepustowość trasy komunikacyjnej, spójność gruntu.

Trzeba znać sposób przeprowadzania badań i metody pozyskiwania wyników (pomiar bezpośredni czy pośredni) – jak w teorii sterowania należy stwierdzić, czy potrzebne jest dodatkowe równanie (równanie obserwacji, odpowiedzi układu).

Analizy wykorzystujące metody statystyki matematycznej (krótko nazywane też metodami statystycznymi) odwołują się również do eksperymentu, który może być czynny lub bierny.

Z eksperymentem połączone są pomiary powiązane z rejestracją ich wyników przez odpowiednie urządzenie. Są to wszystko wielkości losowe.

W podpunkcie 3.4.8 dokumentu Komitetu Wspólnego ds. Przewodników w Metrologii (JCGM – Joint Committee for Guides in Metrology) napisano: „The evaluation of uncertainty is neither a routine task nor a purely mathematical one; it depends on detailed knowledge of the nature of the measurand and of the measurement. The quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement therefore ultimately depend on the understanding, critical analysis and integrity of those who contribute to the assignment of its value”. Wynika stąd, że ocena niepewności pomiarowych nie jest ani łatwym, ani rutynowym, ani też czysto matematycznym zadaniem; wymaga szczegółowej wiedzy o mierzonej wielkości i samym pomiarze. Wiarygodność niepewności pomiarowej przypisanej do wyniku zależy zatem od zrozumienia, krytycznej analizy oraz uczciwości osób dokonujących jego oceny.

Materiał zawarty w niniejszym skrypcie jest przeznaczony przede wszystkim dla osób studiujących kierunki związane z inżynierią lądową i transportem. Będzie także przydatny osobom studiującym inne kierunki, powiązane z geodezją, inżynierią materiałową, inżynierią mechaniczną itp. Z pożytkiem może być wykorzystywany przez słuchaczy studiów podyplomowych i doktoranckich, przez konstruktorów i projektantów oraz pracowników naukowych. Oprócz uzasadnień wybranych twierdzeń, wzorów, metod postępowania zawiera wiele przykładów, szczególnie z zakresu inżynierii lądowej i transportu, ilustrujących omawiane zagadnienia.

Zaleca się, aby zgłębianie zasadniczej treści niniejszego opracowania rozpocząć od lektury Dodatku, co znacznie ułatwi zapoznawanie się z zasadniczą częścią pracy. Ponadto zakłada się znajomość kombinatoryki (na poziomie szkoły średniej), podstaw analizy matematycznej, rachunku różniczkowego i całkowego, algebry liniowej. Zakłada się też, że czytelnik zna podstawy mechaniki, wytrzymałości materiałów, mechaniki gruntów, metrologii itp. Materiał zawarty w niniejszym skrypcie spełni swoją rolę, jeżeli zostanie dodatkowo przedstawiony w formie dobrego, profesjonalnego wykładu uzupełnionego ćwiczeniami.

W wielu miejscach świadomie i celowo dokonano połączenia różnych form gramatycznych, np. formy bezosobowej z formą w liczbie mnogiej itp. Chodzi o to, aby czytelnik wspólnie z autorem zgłębiał (odkrywał) tajniki wiedzy z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, połączone z zastosowaniami w inżynierii lądowej i transporcie, i potrafił je poprawnie wykorzystać. Właśnie ta forma pozwoli czytelnikowi poczuć wspólnotę działania w tym zakresie. Chodzi też o nawiązanie pewnej formy „dialogu” z czytelnikami. Jest to nowoczesna i innowacyjna forma przekazywania wiedzy, zbliżona np. do żywego, dobrego wykładu. Robimy to razem. Nie *ex cathedra*. W tej metodzie

przewodnikiem jest autor, „zwiedzającym” – czytelnik (jak na wycieczce lub w galerii sztuki). Czytelnik w tym przypadku (w tej metodzie) czuje wspólnotę, a to zwiększa efekty uczenia się. Celem jest też przyzwyczajanie czytelników do logicznego myślenia. Przedstawiony materiał, dotyczący rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, jest też doskonałym wprowadzeniem do teorii niezawodności oraz teorii procesów stochastycznych, które mają szerokie zastosowanie między innymi w inżynierii lądowej i transporcie oraz w teorii pomiarów, których wyniki są traktowane jako sygnały, a sztuczna inteligencja, mająca swój początek w matematyce, jest pewną wypadkową statystyki.

Podziękowania za sugestie i cenne uwagi dotyczące skryptu składam Panu dr. hab. Hubertowi Wysockiemu, prof. uczelni, z Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni.

Zalecana bibliografia

Książki, artykuły, materiały konferencyjne

- [1] Abramski M., Mieloszyk E., Milewska A. Analysis of compressive forces in CFGFT cylindrical pillars and their coatings using laboratory tests and metric spaces. *Measurement* 2019; 142: 113–121.
- [2] Bachmacz W., Werner K. Wytrzymałość materiałów, studium doświadczalne. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2002.
- [3] Bałuch H. Limiting values of rail corrugation wear. *Archives of Transport* 2001; 4: 5–25.
- [4] Bałuch H. Metoda określania trwałości dróg kolejowych. *Przegląd Komunikacyjny* 2003, nr 10, s. 1–4.
- [5] Barylski A., Koc W., Mieloszyk E. Seitliche Abnutzung der Schienen in Bögen bei der Stadtschnellbahn (Untersuchung unter tribologischen Aspect in Gdańsk). *Tribologie und Schmierungsstechnik* 1992; 1: 25–28.
- [6] Bethea R.M., Duran B.S., Boullion T.L. *Statistical methods for engineers and scientists*. Marcel Dekker, New York and Basel 1995.
- [7] Blicharski M. *Wstęp do inżynierii materiałowej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2001.
- [8] Bołotin W.W. *Metody statystyczne w mechanice budowli*. Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1968.
- [9] Boruszak A., Sygulski R., Wrześniowski K. *Wytrzymałość materiałów, doświadczalne metody badań*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa – Poznań 1984.
- [10] David H.A., Nagaraja H.N. *Order statistics*. John Wiley & Sons, New Jersey 2003.
- [11] DeGroot M.H. *Probabilidad y estadística (Probability and Statistics)*. Addison-Wesley Iberoamericana 1988.
- [12] Dembicki E. *Les foundation*. Institut de mécanique. Université de Grenoble, Grenoble 1981.
- [13] Dembicki E. *Mechanika ośrodków ciągłych i rozdrobnionych*. Wykłady w ramach studium doktoranckiego *Geotechnika i inżynieria środowiska*. Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1995–1996.
- [14] Dembicki E. *Parcie, odpór i nośność gruntu*. Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1979.
- [15] Dembicki E., Mieloszyk E., Grulkowski S., Milewska A., Szwaczkiewicz K. Konceptcja połączenia kolejowego Morskiego Portu Gdynia S.A. z Kolejową Obwodnicą Trójmiasta. *Inżynieria Morska i Geotechnika* 2020; 41(6): 266–288.

- [16] Fisz M. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1969.
- [17] Flachsmeier J. Kombinatorik. Eine Einführung in die mengentheoretische Denkweise. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.
- [18] Grabski F. Matematyka. Matematyczne podstawy badań operacyjnych. Wydawnictwo WSMW, Gdynia 1981.
- [19] Katulski Z., Szczepiński W. Rachunek błędów dla inżynierów. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [20] Klir G.J., Yuan B. (red.). Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy systems. Selected papers by Lotfi A. Zadeh. Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory. Vol. 6. World Scientific, Singapore 1996.
- [21] Kolassa J.E. Series approximations methods in statistics. Springer 2006.
- [22] Kubik L.T. Rachunek prawdopodobieństwa. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1980.
- [23] Lehmann E.L. Testing statistical hypotheses. Springer 1997.
- [24] Lehmann E.L. Theory of point estimation. John Wiley & Sons, New York 1983.
- [25] Maroński R. Siłownie wiatrowe. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2016.
- [26] Mieloszyk E. Nieklasyczny rachunek operatorów w zastosowaniu do uogólnionych układów dynamicznych. Maszyny Przepływowe, t. 30. IMP PAN, Gdańsk 2008.
- [27] Mieloszyk E., Abramski M., Milewska A. CFGFRPT piles with a circular cross-section and their application in offshore structures. Polish Maritime Research 2019; 26(3): 128–137.
- [28] Mieloszyk E., Abramski M., Milewska A. Determination of the shape of the CF-GFT cylindrical column based on laboratory tests. Measurement 2024; 232(115): 114650.
- [29] Mieloszyk E., Milewska A., Grulkowski S. Assessment of image processing methods for the determination of propagation of squat-type defects in rails. XXII International Seminar of Metrology „Methods and techniques of signal processing in physical measurements”, Rzeszów–Arlamów, 17–20 September 2018.
- [30] Mieloszyk E., Milewska A., Grulkowski S. Assessment of image processing methods for the determination of propagation of squat-type defects in rails. [W:] Hanus R., Mazur D., Kreischer C. (red.). Techniques of Signal Processing in Physical Measurements. Springer 2019: 211–229.
- [31] Mieloszyk E., Milewska A., Grulkowski S. Rozchodzenie się negatywnych skutków katastrof kolejowych z udziałem materiałów niebezpiecznych. Magazyn Kultury Bezpieczeństwa 2019: 154–167.
- [32] Mieloszyk E., Orłowski A. Model of the Internet mortgage market optimization. [W:] PAMM, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. Special Issue: 80th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAAM), Gdańsk, 9–13 February 2009: 581–582.
- [33] Mieloszyk E., Wyroślak M. Triple correlation states between in-situ tested soil parameters. Archives of Civil Engineering 2024; 70(3): 5–17.

- [34] Milewska A. Ćwiczenia z dydaktyki przedmiotowej – matematyka na trzyletnich poddyplomowych studiach pedagogicznych. Politechnika Gdańska, Gdańsk 2009–2013.
- [35] Milewska A. Wykłady i ćwiczenia z dydaktyki nauczania matematyki na trzyletnich studiach poddyplomowych *Matematyka dla nauczycieli*. Politechnika Gdańska, Gdańsk 2008–2017.
- [36] Milewska A. Wykłady i ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki na trzyletnich studiach poddyplomowych *Matematyka dla nauczycieli*. Politechnika Gdańska, Gdańsk 2008–2017.
- [37] Milewska A. Wykłady z modelowania komputerowego na trzyletnich poddyplomowych studiach pedagogicznych. Politechnika Gdańska, Gdańsk 2009–2013.
- [38] Milewska A., Żukowska J. An attempt of apply the Weibull distribution in road traffic losses analysis. *Journal of KONBiN* 2008; 7(4): 131–137.
- [39] Milewska A., Żukowska J. Próba zastosowania rozkładu Weibulla do analizy strat w ruchu drogowym. *Journal of KONBiN* 2008; 7(4): 138–144.
- [40] Milewska A., Żukowska J. The sensitiveness of the speed of pile displacement to speed variations of hammer in beating down process. [W:] PAMM, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. Special Issue: 80th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAAM), Gdańsk, 9–13 February 2009: 601–602.
- [41] Neimitz A. *Mechanika pękania*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [42] Olofsson P. *Probability, statistics and stochastic processes*. John Wiley & Sons, New Jersey 2005.
- [43] Pawłowski Z. *Statystyka matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976.
- [44] Siuta T. Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do krótkoterminowej prognozy przepływów wezbraniowych w rzekach. *Czasopismo Techniczne. Środowisko* 1999, z. 2-Ś, 103–119.
- [45] Szmytkiewicz P., Szmytkiewicz M., Schonhofer J., Morawski M. Obliczenia przebudowy profilu wydmy wywołanej huraganem – wstępne wyniki. *Inżynieria Morska i Geotechnika* 2018; 1: 20–31.
- [46] Volk W. *Statystyka stosowana dla inżynierów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1973.
- [47] Wilker H. *Weibull-Statistik in der Praxis. Leitfaden zur Zuverlässigkeitsermittlung technischer Komponenten*. Books on Demand, Norderstedt 2010.
- [48] Wilker H. *Weibull Statistik in der Praxis. Leitfaden zur Zuverlässigkeitsermittlung technischer Produkte*. Books on Demand, Norderstedt 2004.
- [49] Wiłun Z. *Zarys geotechniki*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2013.
- [50] Witte R.S., Witte J.S. *Statistics*. John Wiley & Sons, New Jersey 2007.
- [51] Wróblewski A., Zakrzewski J. *Wstęp do fizyki*, t. 1, 2. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.
- [52] Zadeh L.A. *Fuzzy sets and information granularity*. [W:] Klir G.J., Yuan B. (red.). *Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy systems. Selected papers by Lotfi A. Zadeh. Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory*. Vol. 6. World Scientific, Singapore 1996: 433–448.

- [53] Zieliński R. Siedem wykładów wprowadzających do statystyki matematycznej. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1990.
- [54] Zieliński R. Tablice statystyczne. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1984.
- [55] Zieliński R., Zieliński W. Tablice statystyczne. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1990.
- [56] Zieliński T.P. Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2007.
- [57] Zimmermann H.J. Fuzzy set theory and its applications. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London 2001.
- [58] Zwillinger D., Kokoska S. CRC standard probability and statistics tables and formulae. CRC Press 2000.

Sprawozdania, raporty, wytyczne, normy projektowe

- [59] ACI Committee 440. Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening existing structures (ACI 440.2R-17). American Concrete Institute, Farmington Hills 2017.
- [60] Dane statystyczne dotyczące MPG podawane przez ZMPG-a SA w 2020 r.
- [61] EN 13848-6:2014. Railway applications – Track – Track geometry quality – Part 6: Characterisation of track geometry quality.
- [62] JCGM 100:2008. Evaluation of measurements data – Guide to the expression of uncertainty in measurements. JCGM 2008.
- [63] OECD. Road safety principles and models. Road Transport Research, OECD Publication, Paris 1997.
- [64] PN-EN 1992-1-1:2008. Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków. Dokument główny + poprawki AC:2009, Ap1:2010, A1:2014-07 + załącznik krajowy NA:2010, 2014.
- [65] PN-EN 1994-1-1:2008. Eurokod 4: Projektowanie zespolonych konstrukcji stalowo-betonowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków. Dokument główny + poprawki AC:2009, Ap1:2010 + załącznik krajowy NA:2010, 2010.
- [66] PN-EN ISO 6506-3 Metale – Pomiar twardości metali sposobem Brinella – Część 3: Kalibracja wzorców odniesienia.
- [67] PN-EN ISO 6506-4 Metale – Pomiar twardości sposobem Brinella – Tablice wartości twardości.
- [68] Raporty Urzędu Transportu Kolejowego. Różne lata.
- [69] Urząd Transportu Kolejowego. Sprawozdanie z funkcjonowania rynku transportu kolejowego. UTK, Warszawa 2020.
- [70] Urząd Transportu Kolejowego. Sprawozdanie ze stanu bezpieczeństwa ruchu kolejowego. UTK, Warszawa 2023.

Metody probabilistyczne i statystyka matematyczna w inżynierii lądowej i transportowej

Streszczenie

Materiał zawarty w niniejszym skrypcie dotyczy metod probabilistycznych i statystycznych ze szczególnym uwzględnieniem ich zastosowań, głównie w inżynierii lądowej i transportowej.

Zdefiniowano przestrzeń probabilistyczną, zmienną losową i jej funkcje. Zmienne losowe dyskretne i ciągłe połączono z ich ilustracją graficzną oraz z wykresami dystrybucji. Wprowadzone pojęcie zmiennej losowej wielowymiarowej (inaczej wektora losowego) i jej własności wykorzystano w statystyce do zdefiniowania próby losowej. Zmienne losowe zawierają w sobie wiele informacji, dlatego w celu ich usystematyzowania omówione zostały parametry zmiennych losowych, takie jak wartość oczekiwana, wariancja itp.

Szczegółowo omówiono wybrane rozkłady zmiennych losowych dyskretnych i ciągłych stosowane w praktyce inżynierskiej. Są to: rozkład dwupunktowy, rozkład Bernoulliego, rozkład Poissona, rozkład Gaussa, rozkład wykładniczy, rozkład Weibulla, uogólniony rozkład gamma, rozkład logarytmiczno-normalny, rozkład t Studenta, rozkład F-Snedecora.

Ze względu na duże znaczenie praktyczne omówiono nierówność Czebyszewa, zbieżność według prawdopodobieństwa oraz metodę najmniejszych kwadratów, także powszechnie stosowaną w statystyce. Zostały sformułowane tzw. twierdzenia graniczne wykorzystywane w statystyce.

W wielu miejscach odwołano się do eksperymentów, które mogą być czynne lub bierne. Opisane zostały metody przeprowadzania takich eksperymentów.

Pojęcie estymatora zostało poprzedzone wprowadzeniem pojęcia statystyki. Następnie omówiono estymację punktową i przedziałową. Wskazano estymatory: zgodne, nieobciążone, efektywne (najefektywniejsze). Dla wybranych statystyk podano metody wyznaczania ich wartości z próby.

Omówiono (przy odpowiednich założeniach) metody tworzenia przedziałów ufności dla parametrów rozkładu normalnego. Przedstawiono hipotezy parametryczne i nieparametryczne oraz hipotezę zerową i alternatywną.

W Dodatku zostały omówione następujące pojęcia i zagadnienia: elementy logiki matematycznej, teoria mnogości (algebra zbiorów, przeciwobraz zbioru, zbiory przeliczalne i ich własności), podstawowe jednostki i przedrostki stosowane w ich nazewnictwie, funkcja gamma Eulera i związana z nią funkcja błędu.

Wszystkie pojęcia zilustrowano licznymi przykładami z zakresu inżynierii lądowej i transportowej.

Probabilistic methods and mathematical statistics in civil and transport engineering

Summary

The material presented concerns probabilistic and statistical methods, with particular emphasis on their applications, mainly in civil and transport engineering.

The probabilistic space, random variable and its functions have been defined. Discrete and continuous random variables were combined with their graphical illustration and distribution charts. The introduced concept of a multidimensional random variable (or random vector) and its properties were used in statistics to define a random sample. Random variables contain a lot of information, so to systematize them, the parameters of random variables were discussed, in particular parameters such as: expected value, variance, etc.

Selected distributions of discrete and continuous random variables used in engineering practice were discussed in detail. These are: two-point distribution, Bernoulli distribution, Poisson distribution, Gaussian distribution, exponential distribution, Weibull distribution, generalized gamma distribution, log-normal distribution, Student's t distribution, Snedecor's F-distribution.

Due to their great practical importance, Chebyshev's inequality, convergence by probability and the least squares method, also widely used in statistics, were discussed. The so-called limit theorems used in statistics were formulated.

In many places reference is made to experiment, which can be active or passive. Methods for conducting such experiments were described.

The concept of an estimator was preceded by the introduction of the concept of statistics. Then, point and interval estimation were discussed. The following estimators were indicated: consistent, unbiased, efficient (the most efficient). Methods for determining their values from the sample were provided for selected statistics.

Methods for creating confidence intervals for normal distribution parameters (with appropriate assumptions) were discussed. Parametric and non-parametric hypotheses as well as the null and alternative hypotheses were presented.

The following concepts and issues were discussed in the Appendix: elements of mathematical logic, set theory (algebra of sets, inverse image, countable sets and their properties), basic units and prefixes used in their nomenclature, Euler's gamma function and the related error function.

All concepts were illustrated with numerous examples from the field of civil and transport engineering.